FATORAÇÃO

Fatorar consiste em representar determinado número de outra maneira, utilizando a multiplicação. A fatoração ajuda a escrever um número ou uma expressão algébrica como produto de outras expressões. Portanto, é preciso compreender cada método de fatoração a fim de se fatorar qualquer expressão algébrica.

Os métodos de fatoração de expressões algébricas são:

- Fator comum (coloca-se o fator comum em evidência);
- Agrupamento de fatores comuns;
- Trinômio Quadrado Perfeito;
- Diferença de dois quadrados $(x^2 - y^2)$;
- Soma de dois cubos $(a^3 + b^3)$;
- Diferença de dois cubos $(a^3 - b^3)$.

FATORAÇÃO POR FATOR COMUM

A fatoração surge como um recurso da Matemática para facilitar os cálculos algébricos; através dela conseguimos resolver situações mais complexas.

Na fatoração por fator comum em evidência, utilizamos a idéia de fazer grupos de polinômios, ao fatorar escrevemos a expressão na forma de produto de expressões mais simples.

O polinômio $x^2 + 2x$ possui forma fatorada, veja:

$$x^2 + 2x$$

podemos dizer que o monômio x é comum a todos os termos, então vamos colocá-lo em evidência e dividir cada termo do polinômio $x^2 + 2x$ por x.

Temos:

$$x\,(x + 2)$$

Concluímos que $x\,(x + 2)$ é a forma fatorada do polinômio $x^2 + 2x$.

Para termos certeza dos cálculos, podemos aplicar a distribuição na expressão $x(x + 2)$ voltando ao polinômio $x^2 + 2x$.

Exemplos de fatoração utilizando fator comum em evidência:

Exemplo 1

$8x^3 - 2x^2 + 6x$ *(fator comum: 2x)*

$2x\,(4x^2 - x + 3)$

Exemplo 2

$a^6 - 4a^2$ *(fator comum: a^2)*

$a^2\,(a^4 - 4)$

Exemplo 3
$4x^3 + 2x^2 + 6x$ *(notamos que o monômio 2x é comum a todos os termos)*
$2x\ (2x^2 + x + 3)$

Exemplo 4
$6x^3y^3 – 9x^2y + 15xy^2$ *(fator comum: 3xy)*
$3xy\ (2x^2y^2 – 3x + 5y)$

Exemplo 5
$8b^4 – 16b^2 – 24b$ *(fator comum: 8b)*
$8b\ (b^3 – 2b – 3)$

Exemplo 6
$8x^2 – 32x – 24$ *(fator comum: 8)*
$8\ (x^2 – 4x – 3)$

Exemplo 7
$3x^2 – 9xy + 6x + 21x^3$*(fator comum: 3x)*
$3x\ (x – 3y + 2 + 7x^2)$

Exemplo 8
$5a^2b^3c^4 + 15\ abc + 50a^4bc^2$ *(fator comum: 5abc)*
$5abc\ (ab^2c^3 + 3 + 10a^3c)$

FATORAÇÃO POR AGRUPAMENTO

Agrupamento é o método pelo qual simplificamos uma expressão algébrica, agrupando os termos semelhantes (termos em comum).

Ao usarmos o método do agrupamento, necessitamos fazer uso da fatoração: termo comum em evidência.

Observe no exemplo a seguir:

$$4x^2 + 8x + 6xy + 12y$$

Termo comum em evidência em cada agrupamento:

$$4x(x + 2) + 6y(x + 2)$$

Colocamos novamente em evidência, pois os termos 4x e 6y possuem termos em comum.

$$(4x + 6y)\ (x + 2)$$

Observe mais alguns exemplos de fatoração por agrupamento:

Exemplo 1

$2xy - 12x + 3by - 18b$

$2x(y - 6) + 3b(y - 6)$

$(2x + 3b)((y - 6)$

Exemplo 2

$6x^2b + 42x^2 - y^2b - 7y^2$

$6x^2(b + 7) - y^2(b + 7)$

$(6x^2 - y^2) (b + 7)$

Exemplo 3

$x^2 - 10x + xy - 10y$

$x(x - 10) + y(x - 10)$

$(x + y) (x - 10)$

Exemplo 4

$a^3b + a^2 + 5ab^3 + 5b^2$

$a^2(ab + 1) + 5b^2(ab + 1)$

$(a^2 + 5b^2) (ab + 1)$

Exemplo 5

$2xy - 4x + 3xy - 6x + 4xy - 8x$

$2x(y - 2) + 3x(y - 2) + 4x (y - 2)$

$(2x + 3x + 4x) (y - 2)$

$9x (y - 2)$

FATORAÇÃO DE UM TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

Trinômio do quadrado perfeito é o 3º caso de fatoração de expressão algébrica. Ele só pode ser utilizado quando a expressão algébrica for um trinômio (polinômio com três monômios) e esse trinômio formar um quadrado perfeito.

Como identificar um trinômio do quadrado perfeito

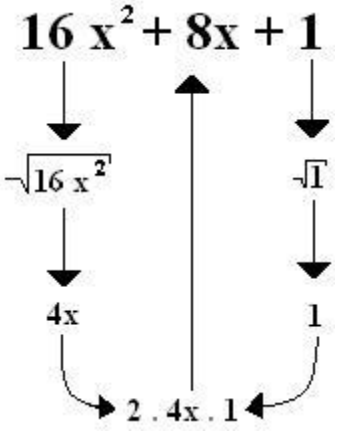
Como já foi dito, nem todo trinômio pode ser representado na forma de quadrado perfeito. Agora, quando é dado um trinômio como iremos identificar que é quadrado perfeito ou não?

Para que um trinômio seja quadrado perfeito ele deve ter algumas características:

- Dois termos (monômios) do trinômio devem ser quadrados.
- Um termo (monômio) do trinômio deve ser o dobro das raízes quadradas dos dois outros termos.

Veja um exemplo:

Veja se o trinômio $16x^2 + 8x + 1$ é um quadrado perfeito, para isso siga as regras acima:



Dois membros do trinômio têm raízes quadradas e o dobro delas é o termo do meio, então o trinômio $16x^2 + 8x + 1$ é quadrado perfeito.

Então, a forma fatorada do trinômio é $\mathbf{16x^2 + 8x + 1}$ é $(\mathbf{4x + 1})^2$, pois é a soma das raízes ao quadrado.

Veja alguns exemplos:

<u>Exemplo 1:</u>
Dado o trinômio $m^2 – mn + n^2$, devemos tirar as raízes dos termos m^2 e n^2 , as raízes serão m e n, o dobro dessas raízes será 2. m . n que é diferente do termo m n (termos do meio), então esse trinômio não é quadrado perfeito.

<u>Exemplo 2</u>:
Dado o trinômio $4x^2 – 8xy + y^2$, devemos tirar as raízes dos termos $4x^2$ e y^2 , as raízes serão respectivamente 2x e y. O dobro dessas raízes deve ser 2 . 2x . y = 4xy, que é diferente do termo 8xy, então esse trinômio não poderá ser fatorado utilizando o quadrado perfeito.

<u>Exemplo 3:</u>
Dado o trinômio $1 + 9a^2 – 6a$.
Devemos, antes de usar as regras do quadrado perfeito, colocar o trinômio em ordem crescente de expoentes, ficando assim:

$$9a^2 - 6a + 1.$$

Agora, tiramos a raiz dos termos $9a^2$ e 1, que serão respectivamente 3a e 1. O dobro dessas raízes será 2 . 3a . 1 = 6a, que é igual ao termo do meio (6a), então concluímos que o trinômio é quadrado perfeito e a forma fatorada dele é $(3a – 1)^2$.

DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS

Diferença de dois quadrados é o 5º caso de fatoração. Para compreendermos melhor como e quando utilizarmos é necessário que saibamos que diferença na matemática é o mesmo que subtração e que quadrado é elevar um número, letra ou termos ao quadrado.

A fatoração pela diferença de dois quadrados só poderá ser usada quando:

- Tivermos uma expressão algébrica com dois monômios (sejam binômios).
- Os dois monômios sejam quadrados.
- A operação entre eles for de subtração.

Veja alguns exemplos de expressões algébricas que seguem esse modelo:

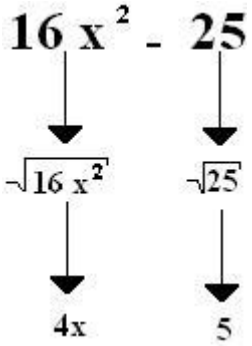
• $a^2 - 1$, a expressão algébrica tem apenas dois monômios, os dois estão ao quadrado e entre eles há uma operação de subtração.

• $\frac{1}{3} - a^2$

• $4x^2 - y^2$

►**Como escrever a forma fatorada dessas expressões algébricas.**

Dada a expressão algébrica $16x^2 - 25$, veja os passos que devemos tomar para chegarmos a forma fatorada utilizando o 5º caso de fatoração.



A forma fatorada será **(4x – 5) (4x + 5)**.

Veja alguns exemplos:

<u>Exemplo 1</u>:
A expressão algébrica $x^2 - 64$ é uma expressão com dois monômios e as raízes quadradas são respectivamente x e 8, então a sua forma fatorada é (x – 8) (x + 8).

Exemplo 2:
Dada a expressão algébrica $25x^2 – 81$, a raiz dos termos $25x^2$ e 81 é respectivamente 5x e 9. Então, a forma fatorada é (5x – 9) (5x + 9).

Exemplo 3:
Dada a expressão algébrica $4x^2 – 81y^2$, a raiz dos termos $4x^2$ e $81y^2$ é respectivamente 2x e 9y. Então, a forma fatorada é (2x – 9y) (2x + 9y).

Exemplo 4:
Dada a expressão algébrica $36 - \frac{x^2}{49}$, a raiz dos termos 36 e $\frac{x^2}{49}$ é respectivamente 6 e $\frac{x}{7}$.
Então, a forma fatorada é: $\left(6 - \frac{x}{7}\right).\left(6 + \frac{x}{7}\right)$

SOMA DE DOIS CUBOS

A Soma de dois cubos é o 5º caso de fatoração de expressões algébricas, para que entenda como e quando devemos utilizá-lo observe a sua demonstração abaixo:

Dado dois números quaisquer x e y, se somarmos os dois obteremos x + y, se montarmos uma expressão algébrica com os dois números teremos $x^2 - xy + y^2$, agora devemos multiplicar as duas expressões encontradas.

$(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ utilize a propriedade distributiva

$x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3$ unir os termos semelhantes

$x^3 + y^3$ é uma expressão algébrica de dois termos onde os dois estão elevados ao cubo e somados.

Assim, podemos concluir que $x^3 + y^3$ é uma forma geral da soma de dois cubos onde x e y poderão assumir qualquer valor real.

A forma fatorada de $x^3 + y^3$ será $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Veja alguns exemplos:

Exemplo1:
$a^3 + 1000$ é a soma de dois cubos.

Podemos escrever essa expressão da seguinte forma:

$a^3 + 103$, assim: x = a e y = 10
Agora basta usarmos a forma geral e fazermos as substituições.

$(x + y)\ (x^2 - xy + y^2)$
$(a + 10)\ (a^2 – a10 + 10^2)$
$(a + 10)\ (a^2 – 10a + 100)$

Portanto, a fatoração de $a^3 + 10^3$ será $(a + 10)\ (a^2 – 10a + 100)$.

<u>Exemplo 2:</u>
$27x^3 + 1$ é a soma de dois cubos.
Podemos escrever essa expressão da seguinte forma:

$(3x)^3 + 1$ assim: $x = 3x$ e $y = 1$
Agora basta usarmos a forma gral e fazermos as substituições.

$(x + y)\ (x^2 - xy + y^2)$

$(3x + 1)\ ((3x)^2 – 3x\ .1 + 1^2)$

$(3x – 1)\ (9x^2 – 3x + 1)$

<u>Exemplo 3:</u>
$8x^3 + y^3$ é a soma de dois cubos.
Podemos escrever essa expressão da seguinte forma:

$(2x)^3 + y^3$ assim: $x = 2x$ e $y = y$
Agora basta usarmos a forma gral e fazermos as substituições.

$(x + y)\ (x^2 - xy + y^2)$

$(2x + y)\ ((2x)^2 – 2xy + y^2)$

$(2x + y)\ (4x^2 – 2xy + y^2)$

DIFERENÇA DE DOIS CUBOS

A Soma de dois cubos é o 7º caso de fatoração de expressões algébricas, o seu raciocínio é o mesmo da **soma de dois cubos**, raciocínio esse que esclarece como e quando devemos utilizá-lo, observe a demonstração abaixo:

Dado dois números quaisquer x e y. Se subtrairmos ficará: $x – y$, se montarmos uma expressão algébrica com os dois números obteremos: $x^2 + xy + y^2$, assim, devemos multiplicar as duas expressões encontradas.

$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ é necessário utilizar a propriedade distributiva;

$x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$ unir os termos semelhantes;

$x^3 - y^3$ é uma expressão algébrica de dois termos, os dois estão elevados ao cubo e subtraídos.

Assim, podemos concluir que $x^3 - y^3$ é uma forma geral da soma de dois cubos onde x e y podem assumir qualquer valor real.

A forma fatorada de $x^3 - y^3$ será $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Veja alguns exemplos:

<u>Exemplo1</u>
Se tivermos que fatorar a seguinte expressão algébrica $8x^3 – 27$, devemos observar que ela tem dois termos. Lembrando dos casos de fatoração, o único caso que fatora dois termos é a diferença de dois quadrados, soma de dois cubos e a diferença de dois cubos.

No exemplo acima os dois termos estão ao cubo e entre eles há uma subtração, então devemos utilizar o 7º caso de fatoração (diferença de dois cubos), para fatorarmos deveremos escrever a expressão algébrica $8x^3 – 27$ da seguinte forma:
$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Ao tirar as raízes cúbicas dos dois termos, temos: $8x^3 – 27$

A raiz cúbica de $8x^3$ é 2x e a raiz cúbica de 27 é 3. Agora, basta substituir valores, no lugar de x colocaremos 2x e no lugar de y colocaremos 3 na forma fatorada
$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$, ficando assim:

$(2x – 3)((2x)^2 + 2x . 3 + 3^2)$

$(2x – 3)(4x^2 + 6x + 9)$

Então, $(2x – 3)(4x^2 + 6x + 9)$ é a forma fatorada da expressão algébrica $8x^3 – 27$.

<u>Exemplo 2</u>
Para resolvemos a fatoração utilizando a diferença de dois cubos devemos seguir os mesmos passos do exemplo anterior. Fatorando a expressão algébrica $r^3 – 64$ temos: As raízes cúbicas de r^3 é r e de 64 é 4, substituindo teremos no lugar de x o r e no lugar de y o 4.

$(r – 4)(r^2 + 4r + 16)$ é a forma fatorada de $r^3 – 64$.